

Т. Рибак¹, докт. техн. наук; П. Паламарчук²

¹Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

²Зборівський коледж ТДТУ імені Івана Пулюя

ІНЖЕНЕРНА МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПРОСТОРОВО НАВАНТАЖЕНИХ ПЛОСКИХ РАМ СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ

В даній роботі запропоновано ефективну інженерну методику розрахунку плоских просторово навантажених конструкцій рам сільськогосподарських машин з загином поздовжніх лонжеронів. При дослідженні напружено - деформованого стану даного типу конструкцій найбільш ефективним є застосування методу мінімуму потенціальної енергії. В роботі запропоновано методику знаходження потенціальної енергії деформації для випадку, якщо просторова рама включає конструктивні елементи складної геометричної форми.

T. Rybak, P. Palamarchuk

ENGINEERING METHOD OF DETERMINATION OF POTENTIAL ENERGY OF DEFORMATION OF THE SPATIALLY LOADED FLAT FRAMES OF DIFFICULT GEOMETRICAL FORM

In-process this the effective engineering method of calculation of the flat spatially loaded constructions of frames of agricultural machines is offered with the bend of longitudinal longerons. At research tensely - the deformed state of this type of constructions, application of method of minimum of potential energy is most effective. The method of finding of potential energy of deformation is in-process offered for a case if a spatial frame includes the structural elements of difficult geometrical form.

Умовні позначення

U - потенціальна енергія згинальної і крутної деформації;

G - модуль зсуву;

Q - перерізуюча сила;

J_x - осьовий момент інерції площі перетину балки;

M_{ze} - згинальний момент, що діє на балку;

K_s - крутний момент;

ρ - радіус кривизни балки.

Сільськогосподарські машини працюють в особливо важких рельєфних і кліматичних умовах. Тому при їх створенні найбільш важливим є підвищення надійності, забезпечення міцності і роботоздатності протягом усього терміну експлуатації.

В сучасному конструюванні сільськогосподарських машин одне з найбільш важливих завдань - пошук досконалих і ефективних методів розрахунку міцності основних тримких вузлів цих машин, оскільки з його вирішенням пов'язані функціональні можливості і надійність роботи сільськогосподарської техніки, прогнозування ресурсу роботи основних базових збірних одиниць. Тому розробка оптимальних конструкторських рішень має вагоме значення для державної машинобудівної стратегії.

Практична цінність таких розрахунків тим вагоміша,

- ✓ чим ефективніші інженерні методи, які використовуються для розрахунку;
- ✓ вірогідніші критерії оцінки міцності і довговічності конструкцій;
- ✓ вища відповідність вихідних даних натурним умовам експлуатації машин.

Відповідність технічним вимогам сільськогосподарських машин або іншої техніки у переважній більшості визначається ще на стадії проектування, коли виконуються розрахунки на міцність і прогнозується ресурс роботи та розрахункова довговічність основних збірних одиниць машини.

При розрахунках конструкцій рам найбільш ефективним виявився метод мінімуму потенціальної енергії - метод Кастиліано. Він дозволяє брати до уваги основні особливості конструкцій і при цьому є відносно простий для розрахунку. Для його застосування потрібно вміти знаходити потенціальну енергію деформації конструктивних елементів складної геометричної форми, чому і присвячена дана робота.

Робота виконується в рамках пріоритетних напрямків розвитку науки і техніки «Новітні та ресурсозберігаючі технології в промисловості, енергетиці та агропромисловому комплексі» на 2002-2006 роки, у відповідності з бюджетною темою ДІ 130-06 «Оптимізація несучих систем замкнутого профілю важко навантажених сільськогосподарських машин типу коренезбиральних комбайнів» та «Розробка і дослідження ресурсозберігаючих технологій в галузі сільськогосподарського машинобудування» на 2003-2007р. (номер державної реєстрації 01024002299).

В роботах [1-3] розглядалася методика розрахунку прямолінійних ділянок рамних конструкцій при зосередженому навантаженні. Слід відзначити, що форма конструкції впливає на методику розрахунку та надійність і довговічність машини [6,7]. Загальну схему рамної конструкції та її навантаження приведено на рис.1.

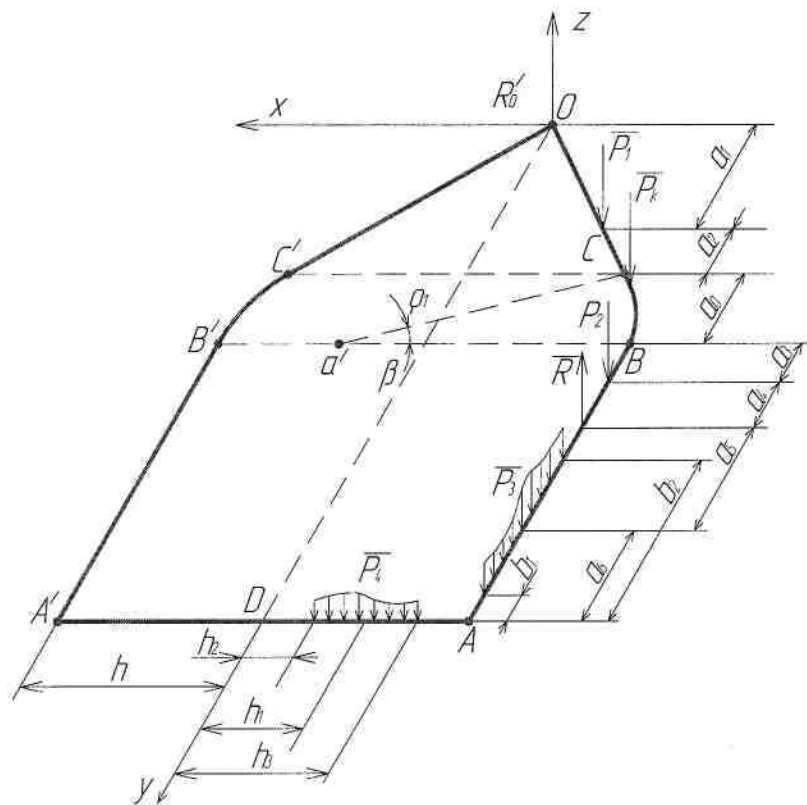


Рисунок 1 - Розрахункова схема рамної конструкції

Тепер розглянемо випадок знаходження внутрішніх силових факторів для прямолінійної балки, навантаженої розподіленням за деяким законом навантаженням інтенсивністю $q(s)$. Знайдемо момент в довільному перерізі балки, який викликаний тільки цим навантаженням.

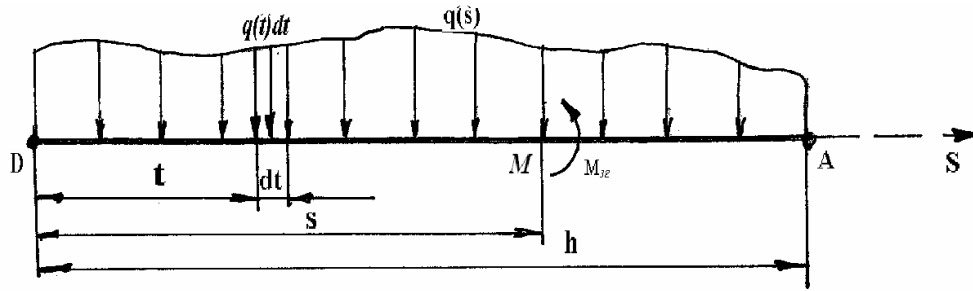


Рисунок 2 - Схема визначення згинального моменту в перерізі M

Знайдемо згинальний момент в деякому перерізі M.

$$M_{sz}(s) + \int_0^s q(t)(s-t)dt = 0, \quad (1)$$

$$M_{sz}(s) = -\int_0^s q(t)(s-t)dt, \quad 0 \leq s \leq h.$$

Формулу (1) можна перевірити для випадку, коли балка навантажена рівномірно розподіленим навантаженням ($q(t) = q_0$). Тоді, згідно з формулою (1), знайдемо

$$M_{sz} = -\left[q_0 \cdot s^2 - q_0 \frac{s^2}{2} \right] = -\frac{q_0 s^2}{2}, \quad 0 \leq s \leq h, \quad (2)$$

що дійсно відповідає згинальному моменту від рівномірно розподіленого навантаження q_0 .

Тепер розглянемо випадок, коли навантажена деяка частина балки (як показано на рис.3).

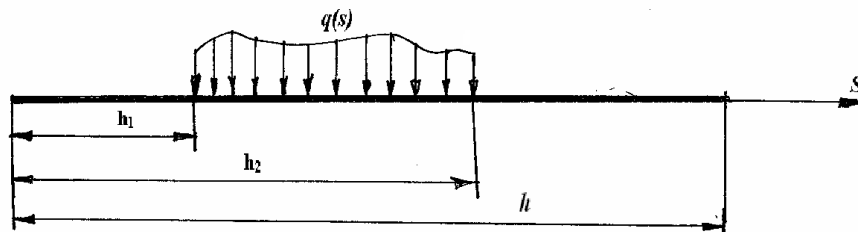


Рисунок 3 - Схема визначення згинального моменту від розподіленого навантаження

Інтенсивність розподіленого навантаження в цьому випадку можна представити наступною формулою:

$$q(s) = q(s)[U_+(s-h_1) - U_+(s-h_2)],$$

де $U_+(x)$ - одинична функція [8]

$$U_+(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Тоді, згідно з формулою (1), маємо

$$M_{sz}(s) = -\int_0^s q(t)[U_+(t-h_1) - U_+(t-h_2)](s-t)dt, \quad 0 < s \leq h. \quad (3)$$

При обчисленні інтеграла у формулі (3) слід пам'ятати, що змінна інтегрування t задовільняє умову $0 \leq t \leq s$. Тому в залежності від того, яке значення приймає верхня границя s , отримаємо:

$$M_{\text{зг}} = \begin{cases} 0, & s \leq h_1, \\ -\int_{h_1}^s q(t)(s-t)dt, & h_1 < s \leq h_2, \\ -\int_{h_1}^{h_2} q(t)(s-t)dt, & s > h_2. \end{cases} \quad (4)$$

Якщо $q(t) = q_0$, то для випадку $s \geq h_2$ знайдемо

$$M_{\text{зг}}(s) = -\int_{h_1}^{h_2} q_0(s-t)dt = -\left[q_0 s(h_2 - h_1) - \frac{q_0 h_2^2}{2} + \frac{q_0 h_1^2}{2} \right] = -q_0(h_2 - h_1)\left(s - \frac{h_1 + h_2}{2}\right),$$

тобто формула (4) дає вірогідний результат. Таким чином, формула (3) повністю визначає момент від розподіленого навантаження на довільній ділянці балки.

Розглянемо ділянку із зосередженим навантаженням, прикладеним до конструкції з двох балок, що з'єднані під прямим кутом, причому навантаження прикладено до однієї балки, а розглядається його вплив на іншу частину конструкції. Нехай на ділянку DA діє зосереджена сила P_4 , як показано на рисунку 4.

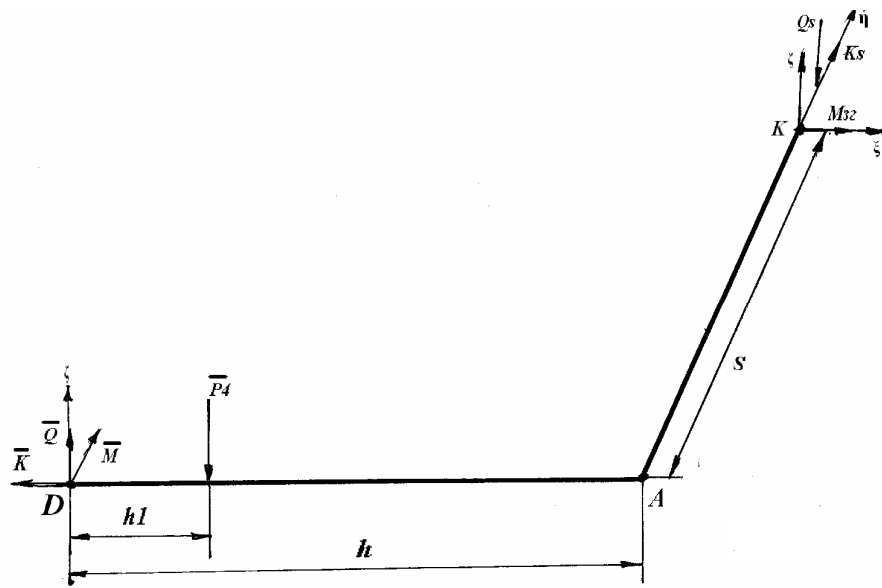


Рисунок 4 - Розрахунок згинального моменту на ділянці КА під дією сили \bar{P}_4

Запишемо умови рівноваги виділеної частини конструкції DAK. Розглянемо тільки суми моментів всіх сил відносно осей ξ і η проведених з точки К.

$$\begin{aligned} \sum \bar{M}_{\xi} &= \bar{M}_{\text{зг}} - \bar{K} - \bar{Q} \cdot s + \bar{P}_4 \cdot s = 0, \\ \sum \bar{M}_{\eta} &= \bar{K}_s + \bar{M} - \bar{P}_4(h - h_1) + \bar{Q} \cdot h = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

отже,

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\text{зг}}(s) &= \bar{K} + \bar{Q} \cdot s - \bar{P}_4 \cdot s, \\ \bar{K}_s(s) &= \bar{P}_4(h - h_1) - \bar{M} - \bar{Q} \cdot h. \end{aligned} \quad (6)$$

Нехай, крім сили P_4 , на нашу конструкцію додатково діє сила P_3 в точці L на ділянці АК (рис. 5).

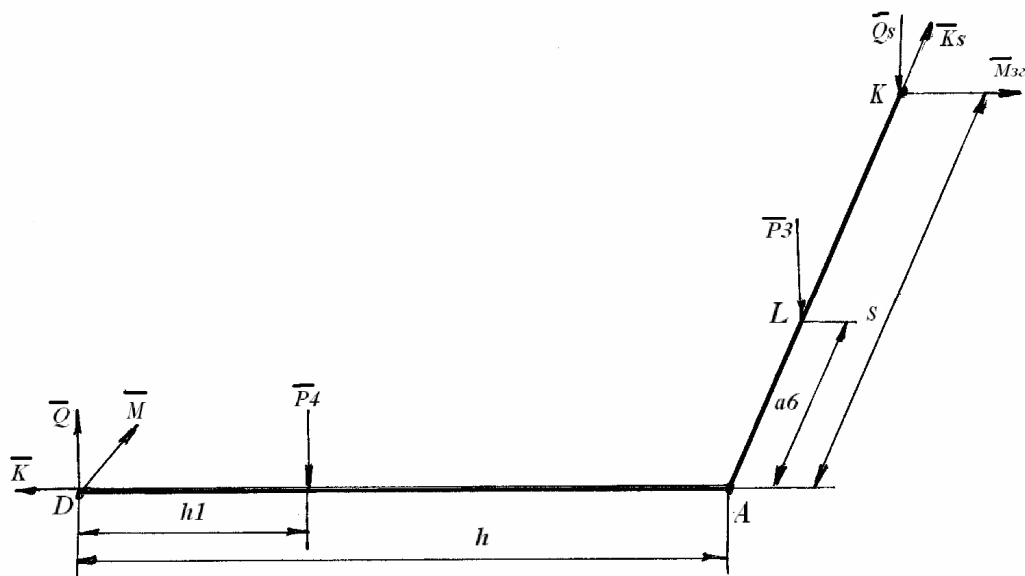


Рисунок 5 - Приклад розрахункової моделі з урахуванням сили P_3

Тоді, вибираючи переріз балки АК на ділянці АЛ з координатою s , ми побачимо, що рівняння (5), (6) не зміняться. Якщо вибрати переріз поза межами ділянки АЛ (рис.5), тобто при $s \geq a_6$, то отримаємо:

$$\sum \vec{M}_\xi = \vec{M}_{3z} - \vec{K} - \vec{Q} \cdot s + \vec{P}_4 s + \vec{P}_3 (s - a_6) = 0,$$

$$\sum \vec{M}_\eta = \vec{K}_s + \vec{M} - \vec{P}_4 (h - h_1) + \vec{Q} \cdot h = 0,$$

отже,

$$\vec{M}_{3z}(s) = \vec{K} + \vec{Q} \cdot s - \vec{P}_4 \cdot s - \vec{P}_3 (s - a_6),$$

$$\vec{K}_s(s) = \vec{P}_4 (h - h_1) - \vec{M} - \vec{Q} \cdot h, \quad s \geq a_6. \quad (7)$$

Порівнюючи залежності (6) і (7), бачимо, що крутний момент не змінився, а змінився лише згинний. Очевидно, що формули (6) і (7) для згинного моменту можна, з урахуванням одиничної функції, замінити однією. Таким же чином можна врахувати й інші зосереджені сили на ділянці АВ (рис. 1). В результаті отримаємо

$$\vec{M}_{3z}(s) = \vec{K} + \vec{Q} \cdot s - \vec{P}_4 s - \vec{P}_3 (s - a_6) U_+(s - a_6) + \vec{R}(s - a_6 - a_5) U_+(s - a_6 - a_5) - \vec{P}_2 (s - a_6 - a_5 - a_4) U_+(s - a_6 - a_5 - a_4), \quad (8)$$

$$\vec{K}_s(s) = \vec{P}_4 (h - h_1) - \vec{M} - \vec{Q} \cdot h, \quad 0 \leq s \leq a_6 + a_5 + a_4 + a_3. \quad (9)$$

Розглянемо тепер криволінійну ділянку від т. В до деякої точки М, причому дузі ВМ відповідає центральний кут φ .

Нехай в деяких точках D', M₀ і Е діють направлені вертикально вниз зосереджені сили. Тоді легко отримати такі формули:

$$ME' = \rho \cdot [1 - \cos(\varphi - \gamma)],$$

$$EE' = \rho \cdot \sin(\varphi - \gamma),$$

$$BB' = \rho \cdot \sin \varphi,$$

$$MB' = \rho \cdot (1 - \cos \varphi),$$

$$M_0 C'' = \rho \cdot \sin \varphi + a \cdot \cos \varphi, \quad (10)$$

$$MC'' = \rho \cdot (1 - \cos \varphi) + a \cdot \sin \varphi,$$

$$D'C' = (\rho - b) \sin \varphi + l \cdot \cos \varphi; \quad (11)$$

$$MC' = b \cdot \cos \varphi + l \cdot \sin \varphi + \rho(1 - \cos \varphi).$$

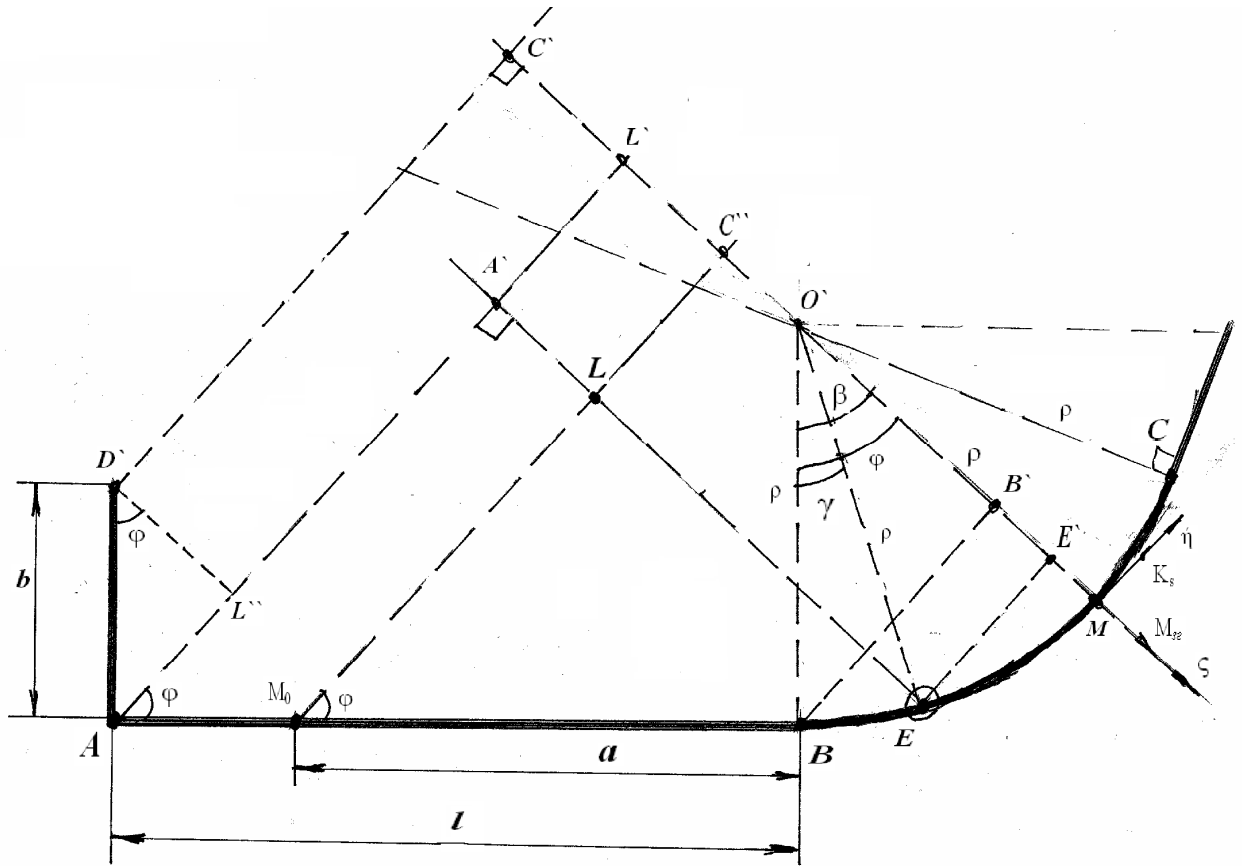


Рисунок 6 - Розрахунок згинального моменту на ділянці загину лонжерона

Користуючись залежностями (10), (11), легко знайти значення моментів всіх сил, показаних на рис. 1 відносно довільного перерізу М (рис. 7).

Розглянемо першу криволінійну ділянку BE.

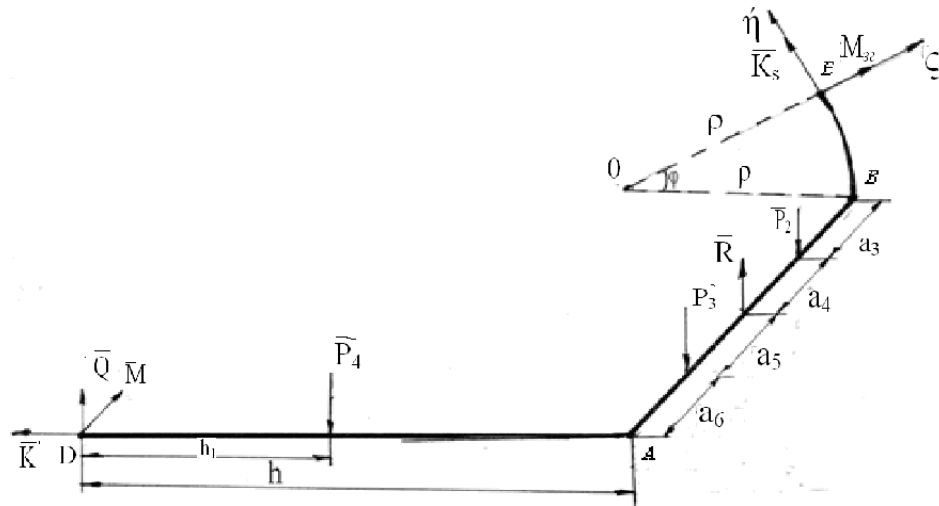


Рисунок 7 - Розрахункова модель визначення всіх моментів відносно осей ζ і η

Позначимо $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = l$.

Тоді, якщо переріз М криволінійної ділянки вибраний на частині BE (тобто до точки дії сили \vec{P}_k), знайдемо

$$\begin{aligned} \vec{M}_{3z}(s) = \sin \varphi \left[-\vec{M} + \vec{Q}(\rho - h) - \vec{P}_4(\rho - h + h_1) + \rho(\vec{R} + \vec{P}_3 - \vec{P}_2) \right] + \\ + \cos \varphi \left[\vec{K} + l(\vec{Q} - \vec{P}_4) - \vec{P}_3(l - a_6) + \vec{R}(a_3 + a_4) - \vec{P}_2 a_3 \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \vec{K}_s = & -\left[\vec{M} + h\vec{Q} - \vec{P}_4(h-h_1)\right]\cos\varphi + (\vec{P}_4 + \vec{P}_3 + \vec{P}_2 - \vec{Q} - \vec{R})\rho(1-\cos\varphi) - \\ & -\left[\vec{K} + (\vec{Q} - \vec{P}_4)l + \vec{R}(a_3 + a_4) - \vec{P}_3(l-a_6) - \vec{P}_2a_3\right]\sin\varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Якщо ж переріз М вибраний на ділянці ЕС, тобто поза межами дії сили \vec{P}_K (в т.Е) направлена вертикально вниз сили P_K (в т. Е), то в залежності (12) появиться додаткова складова:

$$\vec{M}'_{32} = -\vec{P}_K \cdot \rho \times \sin(\varphi - \gamma),$$

а в залежності (13)- складова

$$\vec{K}_s' = \vec{P}_K \cdot \rho [1 - \cos(\varphi - \gamma)].$$

Узагальнюючи викладене, для криволінійних ділянок поздовжніх лонжеронів рам отримаємо:

$$\begin{cases} \vec{M}_{32}^{(BC)} = \sin\varphi \left[-\vec{M} + \vec{Q}(\rho-h) - \vec{P}_4(\rho-h-h_1) + \rho(\vec{R} - \vec{P}_2 - \vec{P}_3) \right] + \\ + \cos\varphi \left[\vec{K} + l(\vec{Q} - \vec{P}_4) - \vec{P}_3(l-a_6) + \vec{R}(a_3 + a_4) - \vec{P}_2a_3 \right] - \vec{P}_K \cdot \rho \times \sin(\varphi - \gamma) \cdot U_+(\varphi - \gamma), \\ \vec{K}_s^{(BC)} = -\left[\vec{M} + h\vec{Q} - \vec{P}_4(h-h_1)\right]\cos\varphi + (\vec{P}_4 + \vec{P}_3 + \vec{P}_2 - \vec{Q} - \vec{R}) \cdot \rho(1-\cos\varphi) - \\ -\left[\vec{K} + (\vec{Q} - \vec{P}_4)l + \vec{R}(a_3 + a_4) - \vec{P}_3(l-a_6) - \vec{P}_2a_3\right]\sin\varphi + \vec{P}_K \cdot \rho [1 - \cos(\varphi - \gamma)] \cdot U_+(\varphi - \gamma). \end{cases} \quad (14)$$

Враховуючи, що на криволінійній ділянці $s = \rho \cdot \varphi$, $ds = \rho d\varphi$, потенціальна енергія згинальної і крутної деформації для криволінійної ділянки:

$$U = \frac{1}{EJ_\xi} \int_0^\beta \vec{M}_{32}^2 \rho d\varphi + \frac{1}{2GI_K} \int_0^\beta \vec{K}_s^2 \rho d\varphi, \quad (15)$$

де M_{32} і K_s визначаються за формулами (14).

Аналогічно розглянемо ділянку СО (рис. 8), для якої:

$$a_0 = \rho \cdot \sin\beta, \quad BF = \rho - \rho \cdot \cos\varphi = \rho(1 - \cos\varphi).$$

Оскільки в т.С $\varphi = \beta$, то точки С', С'', Е' будуть знаходитись на прямій CS (т.М співпадає з т.С). Тоді отримаємо залежності:

$$\begin{aligned} EE' &= \rho \cdot \sin(\beta - \gamma); \\ ME' &= \rho [1 - \cos(\beta - \gamma)]; \\ M_0C'' &= \rho \cdot \sin\beta + a \cdot \cos\beta; \\ MC'' &= \rho(1 - \cos\beta) + a \cdot \sin\beta; \\ DC' &= (\rho - b)\sin\beta + l \cdot \cos\beta; \\ MC' &= a \cdot \cos\beta + l \cdot \sin\beta + \rho(1 - \cos\beta). \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо точку М змістити на відстань s від т. С вздовж прямолінійної ділянки СО, то відстані DC', M_0C'' , EE' також зростуть на величину s, а ME', MC'' , MC' не зміняться порівняно з їхнім значенням у формулах (16).

$$\begin{aligned} EE' &= \rho \cdot \sin(\beta - \gamma) + s; \\ M_0C'' &= \rho \cdot \sin\beta + a \cdot \cos\beta + s; \\ DC' &= (\rho - b)\sin\beta + l \cdot \cos\beta + s. \end{aligned}$$

Крім цього, легко довести, що $\beta = \alpha$, а $\cos\beta$ і $\sin\beta$ можна визначити через параметри a_0 і ρ .

$$a_0 = \rho \cdot \sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{a_0}{\rho},$$

$$OF = \sqrt{\rho^2 - a_0^2} = \rho \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^2}. \quad (17)$$

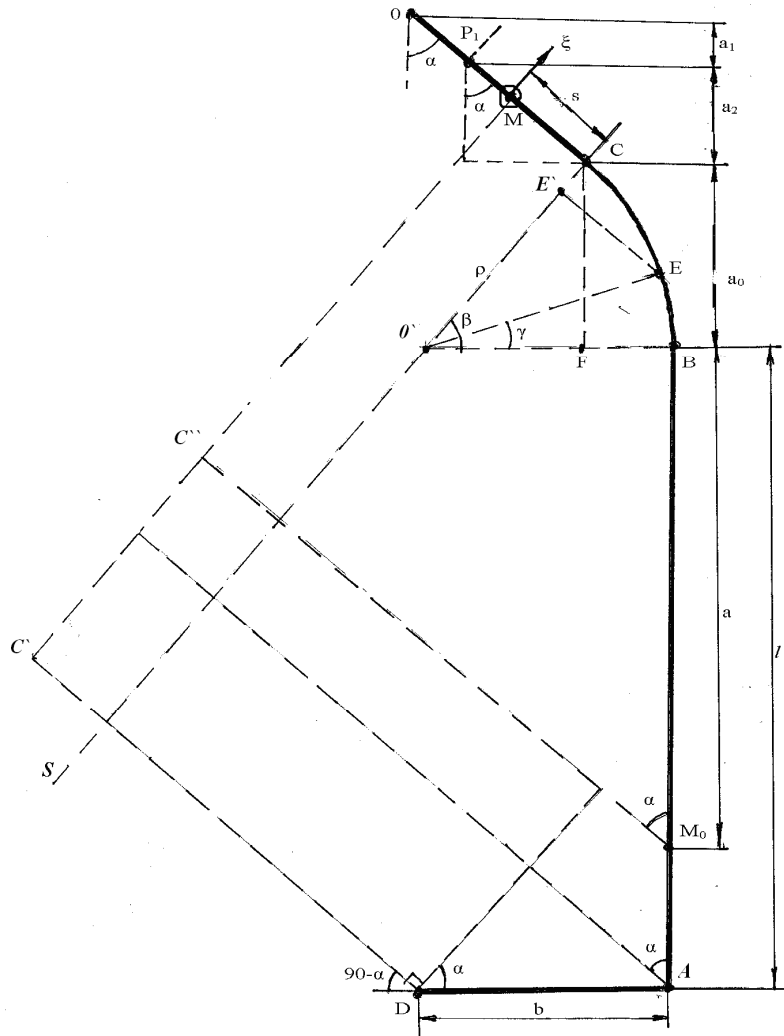


Рисунок 8 - Розрахунок згинальних моментів на ділянці CO

Якщо врахувати, що на ділянці CO діє сила \vec{P}_1 , то знайдемо:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{32}^{(co)} = & \sin \alpha \left[-\vec{M} + \vec{Q}(\nu - h) - \vec{P}_4(\rho - h + h_1) + \rho(\vec{R} - p_3 - p_2) \right] + \\ & + \cos \alpha \left[\vec{K} + l(\vec{Q} - \vec{P}_4) - \vec{P}_3(l - a_6) + \vec{R}(a_3 + a_4) - \vec{P}_2 a_3 \right] - \vec{P}_K \cdot \rho(\alpha - \gamma) + \\ & + s(\vec{Q} - \vec{P}_4 - \vec{P}_3 + \vec{R} - \vec{P}_2 - \vec{P}_K) - \vec{P}_1 \left(s - \frac{a_2}{\cos \alpha} \right) \cdot U_+ \left(s - \frac{a_2}{\cos \alpha} \right); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \vec{K}_s^{(co)} = & - \left[\vec{M} + h\vec{Q} - \vec{P}_4(h - h_1) \right] \cos \alpha + (\vec{P}_4 + \vec{P}_3 + \vec{P}_2 - \vec{Q} - \vec{R}) \cdot \rho(1 - \cos \alpha) - \\ & - \left[\vec{K} + (\vec{Q} - \vec{P}_4)l + \vec{R}(l - a_6) - \vec{P}_2 a_3 \right] \sin \alpha + \vec{P}_K \cdot \rho[1 - \cos(\alpha - \gamma)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Отже, потенціальна енергія деформації в останньому прямолінійному елементі:

$$U = \frac{1}{2EJ_\xi} \int_0^{\frac{a_1+a_2}{\cos \alpha}} \vec{M}_{32}^2 ds + \frac{\vec{K}_s^2}{2GI_K} \cdot \frac{a_1 + a_2}{\cos \alpha}, \quad (20)$$

де M_{32} і K_s визначаємо за формулами (18) і (19).

Висновок

Дані проведених аналітичних досліджень можуть служити основою для оцінки реального напружено-деформівного стану в перетинах поздовжніх лонжеронів рам складної геометричної конструкції сільськогосподарських машин, що дозволить оптимізувати їх матеріаломісткість, а також прогнозувати ресурс роботи до необхідного терміну служби.

Література

1. Рибак Т.І. Пошукове конструювання на базі оптимізації ресурсу мобільних сільськогосподарських машин.- Тернопіль :Збруч, 2003.- 332с.
2. Н.Н. Шапошников, Н.Д. Табасов, В.Б. Петров, В.И. Мяченков Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость.- М.: Машиностроение, 1981.- 333 с.
3. А.М. Арсланов Расчет элементов конструкций заданной надёжности при случайных воздействиях.- М.: Машиностроение, 1987.-117 с.
4. Мяченков В.И. Мальцев В.П. Майборода В.П. Расчет машиностроительных конструкций методом конечных элементов.- М.: Машиностроение.- 1989.- 519 с.
5. Л. М. Грошоев., Н. Ф. Дмитриченко., Т. И Рыбак. Надёжность сельскохозяйственной техники. –К.: Урожай, 1990. -190с.
6. Т. Рибак, П. Паламарчук, М. Михайлишин. Особливості розподілу внутрішніх силових факторів з урахуванням геометрії конструкцій рам окремих сільськогосподарських машин // Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2007. – Т.12, №3. - С. 46 - 52.
7. Заблонский К.И. Мак С.Л. Влияние конструктивных форм деталей машин на их долговечность.- К.:Техника,- 1971.- 184 с.
8. Корн Г. Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров): определения, теоремы, формулы. Изд.4-е. - М. : Наука, 1978.- 832с.

Одержано 24.10.2007 р.